Esbozo sobre las dimensiones

Si queremos probar suerte con las operaciones lineales que se llevan a cabo en un universo lleno de magnitudes, siempre podemos intentar asociar cada magnitud con una dimensión diferente, para luego interrelacionar los estados asociándoles algún tipo de álgebra.

Si fuéramos capaces de reducirlo todo a un conjunto de operaciones lineales, bien sería posible encontrar una matriz que lo represente, para luego encontrar una base que permita reestructurar las operaciones reescribiéndolas, por ejemplo, de una manera más lineal.

¿Podrían estos dos pasos estar justificados?

Si lo que deseamos es crear nuestra notación particular llena de símbolos del tipo:
$a_0 + a_1 \cdot i_1 + a_2 \cdot i_2 + a_3 \cdot i_3 + \ldots$

Si queremos que esa notación sea compatible con la forma polar que los relaciona con ángulos, antes bien podemos partir de lo que significa hacer un giro en un plano:

La transformación de $a_0 + a_1 \cdot i_1$ mediante un giro de α radianes supone transformar:

a_0	$a_0 \cdot \text{Cos}\ \alpha - a_1 \cdot \text{Sen}\ \alpha$
a_1	$a_0 \cdot \text{Sen}\ \alpha + a_1 \cdot \text{Cos}\ \alpha$

Más fácilmente, podemos considerar la operación del giro como si fuera una matriz. Ahora bien, si el ángulo que queremos representar en el giro es el ángulo con el que se relacionan las dimensiones (π/2) entonces la matriz cambia y, con ella, las transformaciones que lleva a cabo. De esta manera, multiplicar por el número imaginario i_1 es equivalente a multiplicar por la matriz

$$\begin{array}{|cc|}\hline 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ \hline\end{array}$$

Otra forma de representar estas matrices podría ser con la notación de las deltas de Dirac; de esta manera, si la primera fila o columna es la 0: $|A\rangle \langle B|$ representa una matriz cuadrada llena de 0's donde sólo hay un 1 en la fila A columna B.

Así podríamos definir el número imaginario: i_1 autovalor de $|0\rangle \langle 1| - |1\rangle \langle 0|$

De la misma manera, podemos querer crear un universo de más de dos dimensiones; entonces, si consideráramos cada dimensión completamente independiente podríamos llevar a cabo el operador tensor, evitando cualquier otra definición que hace perder completamente el interés al concepto: aplicar el tensor significa que el autovalor se convierte en su valor. De esta manera, si considero lo que multiplica al 1 como la primera dimensión de nuestro plano (que será como el coeficiente que multiplica a la dimensión $|0\rangle$) y lo que multiplica a i_1 (por tanto $i_1 = |1\rangle$) el segundo

coeficiente, entonces i_2 = |2> = |10> = |1> |0>, es decir la tensión del 1 sobre el 0, mientras que i_3 = |1> |1>.
Considerando 1 autovalor de |0> <0| + |1> <1|, al pasar a las cuatro dimensiones el 1 de |0> <0| de su propia matriz se convierte en |0> <0| + |1> <1|, y el otro uno pasa a ser otra matriz identidad de rango 2. Como los ceros pasan a ser matrices de rango 2 completamente nulas, el resultado es:

1 autovalor de |0> <0| + |1> <1| + |2> <2| + |3> <3|

Haciendo lo mismo resulta:

i_1 autovalor de -|0> <2| - |1> <3| + |2> <1| + |3> <0|
i_2 autovalor de -|0> <1| +|1> <0| - |2> <3| + |3> <2|
i_3 autovalor de |0> <3| - |1> <2| - |2> <1| + |3> <0|

Quisiera ahora reducir la notación: fíjense cómo para definir uno de esos valores imaginarios no necesitamos nada más que ir diciendo la columna que multiplica a la fila y si es +1 o -1. Es por ello que yo personalmente reduzco la notación de la siguiente manera:

1 = < 1 2 3 4>
i_1 = <-3 -4 2 1>
i_2 = <-2 1 -4 3>
i_3 = <4 -3 -2 1>

Con esta notación se puede representar mejor en un ordenador los números imaginarios a través de una clase, con el fin de poder estudiarlos más cómodamente.

Volviendo al tema, esta definición sería exactamente de cuatro dimensiones y sin embargo, antes de llegar a la cuatra dimensión, nuestro universo tridimensional no admite este comportamiento exactamente: si nos encontramos en el interior de una esfera y pretendemos girar esta posición en cualquiera de los tres ángulos, nos daremos cuenta de que nos movemos en una superficie con tres coordenadas. Si nos interesara representar, por tanto, también el ángulo que sea combinación de los otros dos podríamos definir los números imaginarios de otra manera. Y es aquí donde entran los cuaterniones.

Debo decir que no me he molestado mucho en averiguar cuál sería la matriz originaria de los cuaterniones, esto es, podemos perfectamente definir sus operaciones mediante una tabla de productos (sin necesidad de matriz alguna), y entonces resultaría que, efectivamente, tras hacer un giro en i_1 seguido de i_2, el resultado sería el de haber girado i_3.

Sin embargo, si queremos llevar a cabo el operador tensor necesitamos una definición más explícita: necesitamos la matriz equivalente a un cuaternión. El problema (si es tal) resulta que podemos encontrar varias definiciones de matrices que podrían representar a un cuaternión.

Así que bien podríamos partir de las matrices de Pauli, que fueron contemporáneas a la definición del cuaternión pero que, al menos, tienen relevancia para la física para el cálculo del spin.

σ_x	0 1 1 0
σ_y	0 –i i 0
σ_z	1 0 0 -1

De esta manera podemos obtener como peculiar resultado $\sigma_x \cdot \sigma_y = i \cdot \sigma_z$, por ejemplo. A partir de este punto ya podríamos definir un esquema de cuatro dimensiones. Así, tras transformar i en su equivalente, obtenemos con mi notación:

σ_x = <3, 4, 1, 2>
σ_y = <4, -3, -2, 1>
σ_z = <1, 2, -3, -4>
i = <-3, -4, 2, 1> = $\sigma_y \cdot \sigma_z \cdot \sigma_x$

Estos esquemas no se rigen por la tabla de multiplicaciones de los cuaterniones, pero suponen una potencia de cálculo equivalente para representar los mismos fines. De hecho, bien nos puede gustar esta notación si luego le añadimos la matriz cuadrada de rango 4: < 2, 1, 0, 0>, entendiendo que los dos 0's añadidos es porque la matriz acabaría de la forma: |0><1| + |1><0|. Si la llamamos σ_L, en honor a Lorentz: se podría obtener la transformación de Lorentz dentro de nuestra álgebra; siempre y cuando recordemos que su equivalente sería: $\gamma \cdot (\sigma_x{}^2 + \beta \cdot \sigma_L)$, con $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ y $\beta = v/c$. Con esa transformación y los giros propios, bien podría enfocarse las ideas relativistas a un concepto de expansión de la esfera mientras se mueven los individuos en ella..., pero eso son perspectivas personales.

Obviamente, esta es una forma de hacerlo. Pero tenemos más posibles definiciones.

Podemos definir un cuaternión usando la definición:
e0 = <1, 2, 3, 4>
e1= <2, -1, -4, 3>
e2= <3, 4, -1, -2>
e3= <4, -3, 2, -1>

Y podremos comprobar que se cumplen con exactitud la tabla de multiplicaciones:

1	**e1**	**e2**	**e3**
e1	-1	e3	-e2
e2	-e3	-1	e1
e3	e2	-e1	-1

Para incluir las otras cuatro dimensiones, sólo basta desplazar la matriz de rango 4 a un lateral y preocuparse de que los signos te permiten hacer cumplir al final que:

e1 · e2 · e3 · e4 · e5 · e6 · e7 = -1

Esto es, e1 · e2 · e3 = -1, por el graffiti que dejó su inventor en una roca.
Así que: e4 · e5 · e6 · e7 = 1 y, concretamente: e4 · e5 · e6 = -e7 por la sencilla razón de que pretendemos que $e1^2 = e2^2 = e3^2 = e5^2 = e6^2 = e7^2 = -1$, aunque haremos que el cuadrado de e4 valga 1.

De hecho las operaciones de grupo de los nuevos giros son eA · eB = ±e4 · eC, siendo A, B y C los tres valores 5, 6 y 7 en algún orden, además de que eA · eB = - eB · eA.

Y eso nos lleva a la siguiente definición:
e1 = <2, -1, -4, 3, 6, -5, -8, 7>
e2 = <3, 4, -1, -2, -7, -8, 5, 6>
e3 = <4, -3, 2, -1, -8, 7, -6, 5>
e4 = <-5, -6, -7, -8, -1, -2, -3, -4>
e5 = <6, -5, -8, 7, 2, -1, -4, 3>
e6 = <7, 8, -5, -6, 3, 4, -1, -2>
e7 = <8, -7, 6, -5, 4, -3, 2, -1>

A falta de definir un álgebra completa, evitando la notación que presento, bien puede resolverse considerando de que se trata de ciclos con signo. La ventaja de este esquema es que sería intuitivo deducir unos esquemas de dimensiones mayores, a considerar siempre la dimensión especial e8 y así, para ajustar los productos...

Sin embargo bien podemos definir los cuaterniones de una manera bien distinta (como más caótica), para luego formar las otras cuatro dimensiones con el fin de que todas se comporten como tales, para cumplir otro tipo de operaciones:

i1 = <-2, 1, -4, 3>
i2 = <3, -4, -1, 2>
i3 = <4, 3, -2, -1>
i4 = <-6, -5, -7, -8, 2, 1, 3, 4>
i5 = <5, -6, 8, -7, -1, 2, 4, -3>
i6 = <-8, 7, -6, -5, 4, 3, -2, 1>
i7 = <7, 8, -5, 6, 3, -4, -1, -2>

En esta ocasión he vuelto a hacer un abuso de notación: el que una ristra de ciclos negatibles se quede corta significa que en su lugar hay que sumarle su tamaño a la magnitud y mantener el signo: i1 = <-2, 1, -4, 3, -6, 5, -8, 7>

Nótese: i1 = <-2, 1> y que 1 = <1>

Con esta definición ahora vemos que efectivamente:
$i1^2 = i2^2 = i3^2 = i4^2 = i5^2 = i6^2 = i7^2 = -1$

Y, por otro lado: i1· i2· i3· i4· i5· i6· i7 = -1; esto se da porque i4· i5· i6 = -i7
De hecho, se cumplirá siempre esta operación de grupo iA · iB · iC = ±iD
para A, B, C y D los valores 4, 5, 6 y 7 en algún orden.

O al menos, esas fueron las propiedades matemáticas que se buscaron en su momento cuando se quisieron definir las dimensiones adicionales. Bien, podría haberse cogido la definición de cuádriga y aplicarle un tensor completamente ortogonal, en cuyo caso no habríamos obtenido un beneficio especial como pasa, por ejemplo con estos últimos enfoques; esto es, supongamos que además quisiéramos crear una propiedad de entrelazamiento "fantasma" entre las dimensiones.

Si todas las dimensiones no se interrelacionaran entre sí entonces sería imposible un entrelazamiento. Es por ello que debemos aprovechar para crear "dimensiones falsas" que nos permitan representar ese dato que parece independiente y, sin embargo, no lo es. Y es que, como pasaba con la transformación de Lorentz, el asunto pasa por tener que escoger una de esas matrices que se salen de las operaciones de grupo y darle una utilidad o significado.

Es así como defino:
T = <2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8>

Que también se puede expresar en dependencia de las demás dimensiones:
T = (i3·i7·i2·i7 + i2·i7·i3·i7 + i2·i6·i3·i6 + i3·i5·i3·i5)/4 + (1-i6·i1·i7)/2

El problema es que parece demasiado complejo como para ser útil...

Y, por supuesto, con la otra versión también se puede hacer. Aunque la gran pregunta que me haría sería: ¿dónde está Maxwell? ¿Algunos de estos giros representan una dimensión cargada magnéticamente o eléctricamente? ¿Podríamos ver algún tipo de conexión? Al fin y al cabo una bobina es como una resistencia imaginaria, bien podríamos elegir cuál de estos valores imaginarios se ajusta más y mejor ya sea a la bobina como al condensador, o al imán...